Die Eindeutigkeit der Lösung des magnetohydrodynamischen Randwertproblems

Von Cs. Hargitai und J. Szabó

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Budapest

(Z. Naturforschg. **16 a**, 92—94 [1961]; eingegangen am 23. April 1960)

Es wird mit einer einfachen, direkten Methode die Eindeutigkeit der Lösung der magnetohydrodynamischen Grundgleichungen bewiesen. Es wird vorausgesetzt, daß die leitende, zähe Flüssigkeit inkompressibel ist und der die Flüssigkeit enthaltende Bereich mit einer glatten Fläche, deren Punkte alle im Endlichen liegen, berandet ist. Eine weitere Voraussetzung ist, daß die magnetische Feldstärke, die Geschwindigkeit und der Druck in dem ganzen Strömungsbereich stetige partielle Ableitungen besitzen. Sind die Werte der magnetohydrodynamischen Größen für $t>0$ auf der Randfläche, für $t=0$ aber in dem ganzen Bereich durch stetige Funktionen vorgegeben, so ist die Lösung der Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik eindeutig.

Dolidse [1] hat in einer Arbeit einen interessanten Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung der Navier-Stokesschen Gleichung der gewöhnlichen Hydrodynamik gegeben. In der vorliegenden Arbeit wird mit einer ähnlichen Methode die Eindeutigkeit der Lösung des magnetohydrodynamischen Randwertproblems bewiesen. Wir nehmen an, daß die Dichte der Flüssigkeit konstant ist. Es wird weiter vorausgesetzt, daß die die Flüssigkeit umfassende, geschlossene Fläche glatt ist und gänzlich im Endlichen liegt.

Nach der Magnetohydrodynamik genügen die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ in einer inkompressiblen, leitenden Flüssigkeit den folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}]+\nu_{\mathrm{m}}\,\Delta\mathfrak{H}\,,\qquad \operatorname{div}\mathfrak{H}=0\,,\qquad (1),\,(2)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}+(\mathfrak{v}\operatorname{grad})\,\mathfrak{v}=-\operatorname{grad}\frac{p}{\varrho}-\frac{1}{4\pi\varrho}[\mathfrak{H}\times\operatorname{rot}\mathfrak{H}]+\nu\,\Delta\mathfrak{v}\,,\qquad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}=0\,,\qquad (4)$$

wo ϱ die Dichte der Flüssigkeit, p den Druck, ν den kinematischen Reibungskoeffizient, $\nu_{\mathrm{m}}=c^2/4\pi\sigma$ den magnetischen Viskositätskoeffizient bedeuten. (σ ist die elektrische Leitfähigkeit, c die Lichtgeschwindigkeit.)

Wir führen nach Elsasser [2] neue Veränderlichen ein:

$$\mathfrak{u}=\mathfrak{v}+\mathfrak{H}(4\pi\varrho)^{-1/2}\,;\quad \mathfrak{w}=\mathfrak{v}-\mathfrak{H}(4\pi\varrho)^{-1/2}.\qquad (5)$$

Mit diesen Variabeln läßt sich das Gleichungssystem (1) bis (4) in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}+(\mathfrak{w}\operatorname{grad})\,\mathfrak{u}=-\operatorname{grad}\varphi+\Delta(\alpha\,\mathfrak{u}+\beta\,\mathfrak{w})\,,\qquad (6)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t}+(\mathfrak{u}\operatorname{grad})\,\mathfrak{w}=-\operatorname{grad}\varphi+\Delta(\alpha\,\mathfrak{w}+\beta\,\mathfrak{u})\,,\qquad (7)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{u}=0\,,\qquad \operatorname{div}\mathfrak{w}=0\,,\qquad (8)$$

wobei

$$\varphi=\frac{p}{\varrho}+\frac{(\mathfrak{u}-\mathfrak{w})^2}{2}\,,\qquad \alpha=\frac{\nu+\nu_{\mathrm{m}}}{2}\,,\qquad \beta=\frac{\nu-\nu_{\mathrm{m}}}{2}\qquad (9)$$

sind. Man sieht, daß $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{H}$ und p eindeutig durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{w}$ und φ bestimmt sind.

Wir betrachten die Bewegung der Flüssigkeit in dem Bereich τ, dessen Randfläche wir mit F bezeichnen wollen. In dem Zeitpunkt $t=0$ werden die Werte von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ in allen Punkten von τ, für $t\geq 0$ aber auf der Randfläche F vorgegeben. Wir beweisen, daß die der Rand- und Anfangsbedingung genügende Lösung des Gleichungssystems (6) bis (8) eindeutig ist.

Nehmen wir an, daß das magnetohydrodynamische Problem zwei Lösungen: $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{w}_1$, φ_1 bzw. $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{w}_2$, φ_2 hat. Setzt man diese Größen in das System (6) bis (8) ein, und bildet die Differenz der entsprechenden Gleichungen, so bekommt man das folgende Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\Phi-(\mathfrak{W}\operatorname{grad})\,\mathfrak{u}_2-(\mathfrak{w}_1\operatorname{grad})\,\mathfrak{U}+\alpha\,\Delta\mathfrak{U}+\beta\,\Delta\mathfrak{W}\,,\qquad (10)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{U}=0\,,\qquad (11)$$

[1] D. E. Dolidse, Dokl. Akad. Nauk, SSSR **46**, 437 [1954].

[2] W. M. Elsasser, Phys. Rev. **79**, 183 [1950].

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Phi - (\mathfrak{U} \operatorname{grad})\, \mathfrak{w}_2 - (\mathfrak{u}_1 \operatorname{grad})\, \mathfrak{W} + \beta\, \Delta \mathfrak{U} + \alpha\, \Delta \mathfrak{W}, \tag{12}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{W} = 0, \tag{13}$$

wo

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2\,;\quad \mathfrak{W} = \mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2\,;\quad \Phi = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{14}$$

sind. Wenn man Gl. (10) mit $\mathfrak{U}$, Gl. (12) aber mit $\mathfrak{W}$ skalar multipliziert, so ergeben sich die folgenden Gleichungen aus (10) und (12):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial t} + \mathfrak{U}\{(\mathfrak{W} \operatorname{grad})\, \mathfrak{u}_2\} + \mathfrak{U}\{(\mathfrak{w}_1 \operatorname{grad})\, \mathfrak{U}\} = -\mathfrak{U} \operatorname{grad} \Phi + \alpha\, \mathfrak{U}\, \Delta \mathfrak{U} + \beta\, \mathfrak{U}\, \Delta \mathfrak{W}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{W}^2}{\partial t} + \mathfrak{W}\{(\mathfrak{U} \operatorname{grad})\, \mathfrak{w}_2\} + \mathfrak{W}\{(\mathfrak{u}_1 \operatorname{grad})\, \mathfrak{W}\} = -\mathfrak{W} \operatorname{grad} \Phi + \beta\, \mathfrak{W}\, \Delta \mathfrak{U} + \alpha\, \mathfrak{W}\, \Delta \mathfrak{W}. \tag{16}$$

Unter Heranziehung von (11) und (13) können wir schreiben:

$$\mathfrak{U} \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{div}(\Phi\, \mathfrak{U}), \tag{17}$$

$$\mathfrak{W} \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{div}(\Phi\, \mathfrak{W}). \tag{18}$$

Es ist leicht, zu beweisen, daß folgende Identität für drei beliebige differenzierbare Vektoren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ gilt:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_3)\, \mathfrak{A}_2 = (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_3) \operatorname{div} \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1\{\mathfrak{A}_2 \operatorname{grad})\, \mathfrak{A}_3\} + \mathfrak{A}_3\{(\mathfrak{A}_2 \operatorname{grad})\, \mathfrak{A}_1\}. \tag{19}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{U}\,,\ \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{w}_1\,,\ \text{bzw.}\ \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{W}\,,\ \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{u}_1$$

und erhalten aus (19)

$$\mathfrak{U}\{(\mathfrak{w}_1 \operatorname{grad})\, \mathfrak{U}\} = \tfrac{1}{2} \operatorname{div} \mathfrak{U}^2\, \mathfrak{w}_1\,, \tag{20}$$

$$\mathfrak{W}\{(\mathfrak{u}_1 \operatorname{grad})\, \mathfrak{W}\} = \tfrac{1}{2} \operatorname{div} \mathfrak{W}^2\, \mathfrak{u}_1\,. \tag{21}$$

Mittels (17), (18), (20) und (21) lassen sich die Gln. (15), (16) folgendermaßen umformen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathfrak{U}^2\, \mathfrak{w}_1 + \operatorname{div}(\Phi\, \mathfrak{U}) = -\mathfrak{U}\{(\mathfrak{W} \operatorname{grad})\, \mathfrak{u}_2\} + \alpha\, \mathfrak{U}\, \Delta \mathfrak{U} + \beta\, \mathfrak{U}\, \Delta \mathfrak{W}, \tag{22}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{W}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathfrak{W}^2\, \mathfrak{u}_1 + \operatorname{div}(\Phi\, \mathfrak{W}) = -\mathfrak{W}\{(\mathfrak{U} \operatorname{grad})\, \mathfrak{w}_2\} + \beta\, \mathfrak{W}\, \Delta \mathfrak{U} + \alpha\, \mathfrak{W}\, \Delta \mathfrak{W}. \tag{23}$$

Integriert man die Summe der Gln. (22), (23) über das Volumen τ, so verschwinden die die Operation Divergenz enthaltenden Glieder nach dem Satz von GAUSS wegen des Verschwindens von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ auf der Fläche F. Es bleibt:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau = -\int_\tau [\mathfrak{U}\{(\mathfrak{W} \operatorname{grad})\, \mathfrak{u}_2\} + \mathfrak{W}\{(\mathfrak{U} \operatorname{grad})\, \mathfrak{w}_2\}]\, \mathrm{d}\tau + \int_\tau [\alpha(\mathfrak{U}\, \Delta \mathfrak{U} + \mathfrak{W}\, \Delta \mathfrak{W}) + \beta(\mathfrak{U}\, \Delta \mathfrak{W} + \mathfrak{W}\, \Delta \mathfrak{U})]\, \mathrm{d}\tau. \tag{24}$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite von (24) können wir mit Hilfe des GREENschen Satzes umformen. Berücksichtigen wir, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ auf dem Rand F von τ verschwinden, so kann das erwähnte Integral folgendermaßen umgestaltet werden:

$$\alpha \int_\tau (\mathfrak{U}\, \Delta \mathfrak{U} + \mathfrak{W}\, \Delta \mathfrak{W})\, \mathrm{d}\tau + \beta \int_\tau (\mathfrak{U}\, \Delta \mathfrak{W} + \mathfrak{W}\, \Delta \mathfrak{U})\, \mathrm{d}\tau = -\int_\tau \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left[\alpha \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)^2 + 2\beta \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial W_i}{\partial x_k} + \alpha \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_k}\right)^2\right] \mathrm{d}\tau, \tag{25}$$

wo U_i und W_i die rechtwinkligen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ bedeuten und die Bezeichnung $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ gebraucht wurde. Es gilt also:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau + I = \int_\tau [\mathfrak{U}\{(\mathfrak{W} \operatorname{grad})\, \mathfrak{u}_2\} + \mathfrak{W}\{(\mathfrak{U} \operatorname{grad})\, \mathfrak{w}_2\}]\, \mathrm{d}\tau, \tag{26}$$

wo

$$I = \int_\tau \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left[\alpha \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)^2 + 2\beta \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial W_i}{\partial x_k} + \alpha \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_k}\right)^2\right] \mathrm{d}\tau. \tag{27}$$

Man kann leicht einsehen, daß keines der Integrale auf der linken Seite von (26) negativ sein kann. Da nämlich im Zeitpunkt $t=0$ die Größen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ im ganzen Bereich τ verschwinden, so gibt es einen endlichen Zeitraum $\langle 0, t_0 \rangle$, wo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau \geq 0 \tag{28}$$

ist. Da weiter die Ungleichungen

$$\alpha = \frac{\nu + \nu_\mathrm{m}}{2} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \nu\, \nu_\mathrm{m} \geq 0 \tag{29}$$

gelten, ist die quadratische Form in dem Integral (27) positiv semidefinit. So wird der Betrag von (26):

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau + I = \left| \int_\tau [\mathfrak{U}\{(\mathfrak{W}\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{u}_2\} + \mathfrak{W}\{(\mathfrak{U}\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{w}_2\}]\, \mathrm{d}\tau \right|. \tag{30}$$

Wenn wir noch berücksichtigen, daß $I \geq 0$ ist, so ergibt sich folgende Ungleichung aus (30):

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau \leq \left| \int_\tau [\mathfrak{U}\{(\mathfrak{W}\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{u}_2\} + \mathfrak{W}\{(\mathfrak{U}\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{w}_2\}]\, \mathrm{d}\tau \right|. \tag{31}$$

Sind die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{w}_2$ in τ stetig, so kann man eine positive Größe M angeben, so daß

$$|\mathrm{grad}\, u_{2i}| \leq M; \quad |\mathrm{grad}\, w_{2i}| \leq M \quad (i = 1, 2, 3) \tag{32}$$

gilt, wo u_{2i} und w_{2i} die rechtwinkligen Komponenten von $\mathfrak{u}_2$ bzw. $\mathfrak{w}_2$ sind. In diesem Fall können wir schreiben:

$$\left| \int_\tau [\mathfrak{U}\{(\mathfrak{W}\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{u}_2\} + \mathfrak{W}\{(\mathfrak{U}\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{w}_2\}]\, \mathrm{d}\tau \right| \leq 6 M \int_\tau |\mathfrak{U}|\, |\mathfrak{W}|\, \mathrm{d}\tau. \tag{33}$$

Es gilt weiter:

$$2 \int_\tau |\mathfrak{U}|\, |\mathfrak{W}|\, \mathrm{d}\tau \leq \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau. \tag{34}$$

Unter Heranziehung von (33) und (34) bekommt man aus (31):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau \leq 6 M \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau. \tag{35}$$

Nach (35) nimmt das Integral $\int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau$ nicht schneller zu, als im Fall der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau = 6 M \int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau. \tag{36}$$

Die Lösung von (36) ist:

$$\int_\tau (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{W}^2)\, \mathrm{d}\tau = C\, e^{6Mt}, \tag{37}$$

woraus sich das identische Verschwinden von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ ergibt, da das Integral in (37) bei $t=0$ verschwinden muß.

Dann folgt aus der Gl. (10) oder aus (12):

$$\mathrm{grad}\, \Phi = 0. \tag{38}$$

Φ hängt also von den Koordinaten x, y, z nicht ab. Ist aber der Druck p auf der Randfläche F vorgegeben, so folgt die Eindeutigkeit des Druckes einfach aus der Gl. (38), aus der ersten der Gln. (9) und aus der Definition der Größe Φ.

Einer von den Verfassern (J. Sz.) dankt Herrn Prof. Dolidse, Tbilissi, für wertvolle Diskussionen.